## Colle du 17 mars : Séries de Fourier - Équations différentielles non linéaires

## 20.1 Cours

Question de cours 1 : Théorème de convergence normale des séries de Fourier.

Question de cours 2 : Théorème de Dirichlet.

Question de cours 3 : Théorème de Cauchy-Lipschitz.

## 20.2 Exercices

Exercice 0 : Tous les exercices de la semaine précédente.

**Exercice 1 :** Résoudre l'équation  $y'^3 = y$ .

**Exercice 2 :** Résoudre  $y'' = 2y^3$ , y(0) = y'(0) = 1.

**Exercice 3 :** Soient I un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f:I\to\mathbb{R}$  continue. Montrer que toutes les solutions de y'=f(y) sont monotones.

**Exercice 4 :** Soit  $a \ge 0$ . Soit y la solution maximale de  $y' = x^3 + y^3$ . Soit  $]\alpha, \beta[$  son intervalle de définition. Montrer que y est strictement croissante sur  $[0, \beta[$ , que  $\beta < +\infty$  et que  $y(x) \to +\infty$  quand  $x \to +\infty$ .

**Exercice 5 :** Soit x la solution maximale de  $x' = \cos t + \cos x$  avec  $x(0) = x_0 \in ]0, \pi[$ . Montrer que x est définie sur  $\mathbb{R}$  et que, pour t > 0, on a  $x(t) \in ]0, \pi[$ .

**Exercice 6**: Soit  $F:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que pour tout  $x\in[a,b]$  la fonction  $y\mapsto F(x,y)$  est strictement croissante. Montrer que, pour tous  $\alpha$  et  $\beta$ , il existe au plus une solution y de y''=F(x,y) telle que  $y(a)=\alpha$  et  $y(b)=\beta$ .

**Exercice 7:** On se place dans  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$ . Soit  $v \in \mathbb{R}^3$ . Montrer qu'il existe une unique fonction  $u = (u_1, u_2, u_3) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  telle que  $u' + u \wedge u' = -u \wedge (u_3 e_3)$  et u(0) = v.